Systèmes orthonormés en dim infinie

I Bessel et Parseval

Rappel : Si $(e_1,\dots,e_p)$ est un système ON de l'eve E

$$\Pi_p : x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle e_k \text{ est}$$

$$\|x\|^2 = \|x-\Pi_p(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle^2 \quad , \quad \|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle^2$$

Th. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une SON, et soit $x \in E$

1) La famille $(|\langle x, e_n\rangle|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme $\leq \|x\|_2^2$

2) On note $F = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $x \in \overline{F} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \|x\|_2^2$

D/ 1) $\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|_2^2$ Bessel $\longrightarrow$ sommabilité

2) $\Pi_k : E \xrightarrow{\text{orth}} \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$

▷ Lemme $x \in \overline{F} \iff \Pi_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$

($\Leftarrow$) Clair ($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in F$ tq $\|y-x\|_2 \leq \varepsilon$
y est alors une CL finie de (e_n) $\exists N \in \mathbb{N}$, $y \in \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_N) = F_N$
Alors $\forall n \geq N$ $y \in F_n$ et $\underbrace{\|x-\Pi_n(x)\|_2}_{d(x,F_n)} \leq \|x-y\|_2 \leq \varepsilon$

Preuve du th : Si $x \in \overline{F}$, $x = \lim_{n\to\infty} \Pi_n(x)$, par $\mathcal{C}^0$ de la norme
$$\|x\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \|\Pi_n(x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2$$

SON total $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(e_n)$ dense

* Si $\|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2$, il vient $\|x - \Pi_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\Pi_n(x)\|^2$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

IMPORTANT (Rappel)

1) $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{E}_{P\Pi}([a,b],\mathbb{C})$ pour $\|\ \|_2$

Il suffit de prouver que, si $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$, il existe un polynôme P

tq $\|P - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$

On commence par trouver $f : \mathcal{C}^0$ tq $\|\varphi - f\|_2 \leq \varepsilon$

Puis, selon Weierstrass : $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$

$\rightarrow \|f - P\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\varepsilon$ ✓

Variante : les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{E}_{2\pi, P\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour $\|\ \|_2$

$$\mathbb{D} = \left\{ f \in \mathcal{E}_{2\pi,P\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x) \right\}$$

Si $f \in \mathbb{D}$ et $\left(\|f\|_2 = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2}_{=0} \right.$: f est nulle en tous ses points de continuité, donc f est nulle.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ sur $]0, 2\pi[$

f est 2π-périodique, alors $f \in \mathbb{D}$.

prenons $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$: $e_0 = 1$, $\begin{cases} e_{-k} = \cos(kx),\ k \geq 1 \\ e_k = \sin(kx),\ k \geq 1 \end{cases}$

On définit $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$; $(1, \sqrt{2}\,e_{-k}, \sqrt{2}\,e_k)$ est un SON total.

Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2 = \langle f, e_0\rangle^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \langle e_k, f\rangle^2 + \langle e_{-k}, f\rangle^2$

* f est impaire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 0$

* $k \geq 1$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{(\pi - t)}_{u}\underbrace{\sin(kt)}_{v'}\,dt \qquad v = \frac{-\cos(kt)}{k},\quad u' = -1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[(\pi - t)\cdot\left(\frac{-\cos(kt)}{k}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\,dt \right)$$

$$= \frac{-1}{2k}(-2\pi) - \frac{1}{2k}\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{k}$$

$\rightarrow \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2k}$

et On a ~~donc~~ : $\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\pi-t)^2 dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi^3}{3}$

$$= \frac{\pi^3}{6}$$

résumons : $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{6}\right) = \frac{2}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Vect(e_n) est dense.

Ex. ① (e_n) est un SON total $\Rightarrow \forall (x,y) \in E^2$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty}\langle e_k, x\rangle\langle e_k, y\rangle$$

② Soit $g \in D$. ~~$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg = \sum$~~

On note $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(kt)\,dt$

Mq $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)g(t)\,dt$

S/ ① On a $\langle e_k, x\rangle\langle e_k, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle e_k, x+y\rangle^2 - \langle e_k, x-y\rangle^2\right)$

Correctement sommable, $S = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ avec Parseval.

② On reprend $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$

$$\langle g, \sqrt{2}e_k\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(kt)\,dt = \frac{b_k}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\langle\sqrt{2}e_k, f\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}k}}\underbrace{\langle\sqrt{2}e_k, g\rangle}_{\frac{b_k}{\sqrt{2}}} = \langle f, g\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)g(t)\,dt \quad ✓$$

IMPORTANT : Si $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, pour $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il vient : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|e_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2$